6. Stunde

Sunday, April 25, 2010
16:18

Ziegler Skriptum S70 – 71.

Zusätzlich:

Def: (1) Sei $T(m,x,y)$ das Kleene Präd T_1 aus dem Ziegler Skriptum. T ist prim. rek.

(2) Das universelle Programm $U: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (eine partielle rek. Fkt) ist def durch:

$U(m,x) = (\mu y\, T(m,x,y))_0$

Das heißt: Sei M eine Maschine. Dann $f^1_M(x)$ (der Output von M auf Input x) $= U(\ulcorner M \urcorner, x)$ (wobei $\ulcorner M \urcorner$ der Code (= die Gödel-Nummer von M ist)

1.5 Folgerungen des universellen Programms

(a) berechenbare $\iff$ rekursiv

(da ja $f^1_M(x) = U(\ulcorner M \urcorner, x)$, $U: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rek daher $U(\ulcorner M \urcorner, \cdot): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rek; rek $\to$ berechenbar wissen wir bereits)

(b) Jede (part) rek Fkt f hat Darstellung $f(x) = (\mu y\; g(x,y))_0$, wobei g prim rek. und $(\cdot)_0$ die "erste Komp. fkt" $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \mapsto x_0$ ebenfalls prim rek, zusätzl. mit $(\text{undef.})_0 = \text{undef.}$
D.h.: Abgesehen von $(\cdot)_0$ reicht es, prim. Rekursion und Einsetzung auf totale Fkt anzuwenden, und μ-rek. ein einziges Mal ebenfalls auf tot. Fkt (aber das Ergebnis ist natürlich i.A. nicht total)

6. Stunde (Forts.)

Sunday, April 25, 2010
16:41

(c) Das Halteproblem $H = \{x : U(x,x) \text{ def}\}$ ist nicht rek. (Sonst wäre

$$g(x) := \begin{cases} U(x,x)+1 & \text{wenn } U(x,x) \text{ def} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

rek., d.h. $g(x) = U(\ulcorner M \urcorner, x)$ für ein M,

d.h. $g(\ulcorner M \urcorner) = U(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner M \urcorner) = \begin{cases} U(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner M \urcorner)+1 & \text{wenn def} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Widerspruch)

1.6. Rekursive und r.e. Teilmengen von $\mathbb{N}$

Wiederholung: $A \subseteq \mathbb{N}^n$ rek. $:\Leftrightarrow K_A : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rek (charakteristische Fkt) $\Leftrightarrow$ Es gibt Computerprogr. das auf jeden Input x hält und ausgibt (entscheidet) ob $x \in A$ oder $x \notin A$.

Haben gesehen: Wenn $A, B \subseteq \mathbb{N}$ rek und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rek, total, dann ist

(·) $A \cap B$, $A \cup B$, $\mathbb{N} \setminus A$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ rek

(·) $\{x : f(x) \in A\}$ rek

Ü (·) $\{x : \exists z < f(x)\ z \in A\}$ rek etc

(·) $\{x : x \text{ Gerade}\}$, $\{x : x \text{ Primzahl}\}$, ... rekursiv

Im Unterschied dazu:

Rekursiv aufzählbar (r.e., recursively enumerable)

Intuitiv: Es gibt ein Computerprogramm, das auf Input x "Ja" ausgibt wenn $x \in A$. Aber wenn $x \notin A$ dann kann M entweder "Nein" ausgeben <u>oder gar nicht terminieren</u>.

Formal: $A \subseteq \mathbb{N}^n$ r.e. $:\Leftrightarrow \exists B \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ rek s.d.

$$A = \{x : \exists y\ (x,y) \in B\}$$

H ist r.e., weil $x \in H \Leftrightarrow U(x,x) \text{ def} \Leftrightarrow \exists z\ T(x,x,z)$ und T ist rek. (sogar: prim. rek.)

Bem: Identifiziere $T \subseteq \mathbb{N}^3$ mit Präd. $T(\cdot,\cdot,\cdot)$